ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ιανουάριος 2016

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

<u>Θέμα</u> 1 : α) Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = 3$, $\|y\|_2 = 4$ και $z \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\|z\|_2 = 5$ και $z \neq \pm(x+y)$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $q = x + y + z$ και $w = x + y - z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $B^T A B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

<u>Θέμα</u> 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

<u>Θέμα</u> 3 : α) Να αποδείξετε ότι $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$, όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $Q \in \mathbb{R}^{n.n}$ είναι ορθογώνιος πίνακας.
β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα</u> 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και $b = (-3 \;\; 11 \;\; 4 \;\; 5)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

<u>Θέμα</u> 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1\;0\;0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την LU παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)